



مقطعہ (DETERMINANTS)

❖ تمام ریاضی کی سچائیاں ایک دوسرے سے تعلق رکھتی ہیں اور حالات پر مبنی ہیں۔ سی۔ پی۔ اسٹین۔ مٹز

4.1 تعارف



پچھلے باب میں ہم ماترس اور ماترس کے الجبرا کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ ہم یہ بھی پڑھ چکے ہیں کہ الجبری مساوات کے نظام کو ماترس کی شکل میں پیش کیا جاسکتا ہے۔ اس کا مطلب ہے اس طرح کی خطی مساواتوں کا نظام۔

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

اس طرح بھی دکھایا جاسکتا ہے۔ اب اس

مساواتوں کے نظام کا ایک ہی حل ہے یا نہیں۔ کا پتہ عدد $a_1 b_2 - a_2 b_1$ سے پی۔ ایس۔ لپلیس

نکالا جاسکتا ہے (اسے یاد کیجئے کہ اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ، یا $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ، تب خطی مساواتوں کا صرف ایک حل ہے) عدد

$a_1 b_2 - a_2 b_1$ جو کہ حل کی یکتائی کو بتاتا ہے ماترس $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ سے جڑا ہوا ہے اور A کا مقطعہ (ڈیٹرمینینٹ)

کہلاتا ہے۔ $\det A$ ۔ ڈیٹرمینینٹ کا بہت زیادہ استعمال انجینئرنگ، سائنس، اکناکس، سوشل سائنس وغیرہ میں ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم، ڈیٹرمینینٹ کا مطالعہ حقیقی اندراج کے ساتھ تین درجہ تک کریں گے ساتھ ہی ہم ڈیٹرمینینٹ کی بہت سی خصوصیات کا مطالعہ کریں گے، صغیرے (minors)، ہم ضربی اور ڈیٹرمینینٹ کا استعمال مثلث کا رقبہ دریافت کرنے میں، ایک مربع ماترس کے شریک اور معکوس دریافت کرنے میں، خطی مساواتوں کے نظام کی ہم آہنگی اور بے آہنگی معلوم کرنے میں اور خطی مساواتوں کے حل 2 یا تین متغیر میں ماترس کے معکوس کا استعمال کرتے ہیں۔

4.2 مقطعہ

n ترتیب والی ہر ماترس $A = [a_{ij}]$ کو ہم ایک عدد (حقیقی یا ملتف) (real or complex) سے منسوب کر سکتے ہیں جو اس مربع ماترس A کا مقطعہ یا ڈیٹرمیننٹ کہلاتا ہے۔ جہاں $a_{ij} = (i, j)^{th}$ ماترس A کا (i, j) واں عنصر ہے۔ اسے ایک فنکشن کی طرح بھی پیش کیا جاسکتا ہے جو ہر مربع ماترس کو ایک منفرد عدد (حقیقی یا ملتف) سے منسوب کرتا ہے۔ اگر M تمام مربع ماترس کا سیٹ ہے، اور K اعداد (حقیقی یا ملتف) کا سیٹ ہے تب $f: M \rightarrow K$ کو $f(A) = k$ سے معرف کیا جاسکتا ہے، جہاں $A \in M$ اور $k \in K$ تب $f(A)$ کو A کا ڈیٹرمیننٹ کہا جاتا ہے۔ اسے $|A|$ یا $\det A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ اگر } A \text{ ہے، تب } A \text{ کا ڈیٹرمیننٹ } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A|$$

ریمارکس

- (i) ماترس A کے لیے $|A|$ کو ماترس A کا مقطعہ پڑھا جاتا ہے تاکہ A کا مقیاس
- (ii) صرف مربع ماترس ہی ڈیٹرمیننٹس ہوتی ہیں۔

4.2.1 ایک رتبہ والی ماترس کا ڈیٹرمیننٹ

مان لیجیے $A = [a]$ ایک رتبہ '1' کی ماترس ہے، تب A کا ڈیٹرمیننٹ a کے برابر بیان کیا جاتا ہے۔

4.2.2 ایک دو رتبہ والی ماترس کا ڈیٹرمیننٹ

مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ایک رتبہ 2×2 کی ماترس ہے۔

تب A کے مقطعہ کی تعریف اس طرح بیان ہوتی ہے۔

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

مثال 1 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ دریافت کیجیے

حل ہمارے پاس ہے

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8. \text{ مثال 2}$$

$$\text{مثال 2} \quad \begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} \text{ دریافت کیجیے}$$

حل ہمارے پاس ہے

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x(x) - (x+1)(x-1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$$

4.2.3 ایک تین رتبہ والی ماترس کا مقطعہ

تین ترتیب والی ماترس کا ڈیٹرمیننٹ دو ترتیب والی ماترس کے ڈیٹرمینٹ کی طرح معرف کر کے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اسے ڈیٹرمینٹ کا پھیلاؤ ایک قطار کے ساتھ (یا ایک کالم کے ساتھ) کہا جاتا ہے۔ تین ترتیب والے ڈیٹرمینٹ کے پھیلاؤ کے چھ طریقے ہیں، ہر ایک تین قطاروں (R_1, R_2, R_3) کے مطابق اور تین کالموں (C_1, C_2, C_3) کیساں قدریں دے کر جیسا کہ ذیل میں رکھا گیا ہے۔ $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ایک مربع ماترس کو ملاحظہ فرمائیں۔

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{یعنی}$$

پہلی قطار R_1 کے ساتھ پھیلاؤ سے

قدم 1 R_1 کے پہلے عنصر a_{11} کو $(-1)^{1+1}$ سے اور $|A|$ کی پہلی قطار R_1 اور پہلے کالم C_1 کے تمام عناصر کو حذف

کرنے کے بعد حاصل شدہ دوسرے رتبہ والی مقطعہ سے ضرب کیجیے

$$(-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{یعنی}$$

قدم 2 R_1 کے دوسرے عنصر a_{12} کو $(-1)^{1+2}$ سے اور $|A|$ کی پہلی قطار (R_1) دوسرے کالم (C_2) کے تمام عناصر کو حذف

کرنے کے بعد حاصل شدہ دوسرے رتبہ کے ڈیٹرمینٹ سے ضرب کیجیے

$$(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{یعنی}$$

قدم 3 R_1 کے تیسرے عنصر a_{13} کو $(-1)^{1+3}$ سے اور $|A|$ کی پہلی قطار R_1 اور تیسرے کالم (C_3) کے تمام عناصر کو حذف کرنے کے بعد حاصل شدہ دوسرے رتبہ کے ڈیٹرمیننٹ سے ضرب کیجئے

$$(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ یعنی}$$

قدم 4 اب ڈیٹرمیننٹ کا پھیلاؤ، اس کا مطلب ہے، $|A|$ کو اقدام 1، 2 اور 3 میں حاصل شدہ ارکان کے مجموعہ کے طور پر لکھا جاسکتا ہے جیسا کہ اوپر دیا گیا ہے۔

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) \\ &\quad + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}) \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &\quad - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \dots(1) \end{aligned}$$

نوٹ ہم چاروں اقدام کو ایک ساتھ لاگو کریں گے۔

دوسری قطار (R_2) کے ساتھ پھیلاؤ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

کے ساتھ پھیلاؤ پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) + a_{22} (a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}) \\
&\quad - a_{23} (a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12}) \\
|A| &= -a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{22} a_{11} a_{33} - a_{22} a_{31} a_{13} - a_{23} a_{11} a_{32} \\
&\quad + a_{23} a_{31} a_{12} \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\
&\quad - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \dots (2)
\end{aligned}$$

پہلے کالم (C₁) کے ہمراہ پھیلاؤ (Expansion along first column)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C₁ کے ہمراہ پھیلائے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{31} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) + a_{31} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) \\
|A| &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\
&\quad - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \dots (3)
\end{aligned}$$

صاف طور پر، |A| کی قدریں (1)، اور (3) میں برابر ہیں۔ یہ پڑھنے والے کے لیے ایک مشتق کے طور پر چھوڑ دیا گیا ہے کہ وہ یہ دکھائیے کہ |A| کی قدریں جب اسے R₃، C₂ اور C₃ کے ساتھ پھیلا یا جائے تو وہ (2)، (1) اور (3) کی قدروں کے برابر ہیں۔

اس کا مطلب ہے، ایک ڈیٹرمنینٹ کو کسی بھی قطار یا کالم کے ساتھ پھیلائے پر یکساں قدر حاصل ہوتی ہے۔

ریمارکس

(i) آسانی کے لیے، ہم ڈیٹرمنینٹ کو اس قطار یا کالم کے ساتھ پھیلاتے ہیں جس میں صفر کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہو۔

(ii) $(-1)^{i+j}$ سے ضرب کرنے کی بجائے، پھیلاتے وقت +1 یا -1 سے ضرب کر سکتے ہیں جس کا انحصار اس پر ہے کہ

(i+j) جفت ہے یا طاق ہے۔

(iii) مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب، یہ دکھانا آسان ہے کہ $A = 2B$ ساتھ ہی $|A| = 0 - 8 = -8$

اور $|B| = 0 - 2 = -2$

مشاہدہ کیجیے کہ $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ یا $|A| = 2^n|B|$ جہاں $n = 2$ مربع ماترس A اور B کا رتبہ 2 ہے۔

عام طور پر اگر $KB = A$ جہاں B اور A ترتیب کی مربع ماترس ہیں۔ تب $|K|^n = |A|$ جہاں $n = 1, 2, 3$ ہے۔

مثال 3 مقطع $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل غور کیجیے کہ تیسرے کالم میں دو اندراج صفر ہیں۔ اس لیے تیسرے کالم (C_3) کے ہمراہ پھیلانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-12) - 0 + 0 = -52$$

مثال 4 $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \sin \beta \\ \cos \alpha & -\sin \beta & 0 \end{vmatrix}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل R_1 کے ہمراہ پھیلانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = 0 \begin{vmatrix} \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & 0 \end{vmatrix} - \sin \alpha \begin{vmatrix} -\sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos \alpha \begin{vmatrix} -\sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin \alpha (0 - \sin \beta \cos \alpha) - \cos \alpha (\sin \alpha \sin \beta - 0)$$

$$= \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta = 0$$

مثال 5 x کی وہ قدریں معلوم کیجیے جن کے لیے $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

حل ہمارے پاس ہے

$$3 - x^2 = 3 - 8$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

مشق 4.1

مشق 1 اور 2 میں مقطعہ کا حساب لگائیے۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \quad -1$$

$$\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix} \quad (ii) \quad \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (i) \quad -2$$

$$|2A| = 4|A| \text{ کہ دکھائیے کہ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ اگر } -3$$

$$|3A| = 27|A| \text{ کہ دکھائیے کہ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ اگر } -4$$

-5 مقطعہ کی قدر معلوم کیجیے۔

$$(i) \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad (iv) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A|, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix} \text{ اگر } -6$$

-7 x کی قدریں معلوم کیجیے، اگر

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$$

4.3 مقطعہ کی خصوصیات

پچھلے حصے میں ہم نے پڑھا ہے کہ کس طرح ڈیٹرمنینٹس کو پھیلا یا جاتا ہے۔ اس حصے میں ہم ڈیٹرمنینٹس کی کچھ خصوصیات کے

بارے میں پڑھیں گے جو اس کی قدر کا اندازہ لگانے کو آسان کر دے گا جو زیادہ سے زیادہ صفر اعداد ایک قطار یا کالم میں حاصل کرنے سے ہوتا ہے۔ یہ خصوصیات کسی بھی رتبہ والے مقطع کے لیے ہیں۔ حالانکہ، ہم اپنے آپ کو صرف '3' ترتیب والے مقطع تک ہی محدود رکھیں گے۔

خصوصیت 1 مقطع کی قدر نہیں بدلتی اگر قطاروں اور کالموں کو آپس میں بدل دیا جائے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{تصدیق کرنا مان لیجیے}$$

پہلی قطر کے ساتھ پھیلائے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Δ کی قطاروں اور کالموں کو آپس میں بدلنے پر، ہمیں ڈیٹرمیننٹ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

کو پہلے کالم کے ساتھ پھیلائے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta_1 = a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$\Delta = \Delta_1 \quad \text{اس لیے}$$

ریمارک اوپر کسی خصوصیت یہ نکلتا ہے کہ اگر A ایک مربع ماترِس ہے، تب $\det(A) = \det(A^T)$ جہاں $A^T = A$ کا پلٹاؤ (transpose)

نوٹ اگر $R_i = i^{\text{th}}$ قطار اور $C_i = i^{\text{th}}$ کالم، تب ہم قطار اور کالموں کو آپس میں بدلنے کے لئے علامتی طور پر $R_i \leftrightarrow C_i$

ہم اوپر دی ہوئی خصوصیت کی ذیل مثال سے تصدیق کریں گے۔

مثال 6، $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ کے لیے خصوصیت کی تصدیق کیجیے۔

حل مقطعہ کو پہلی قطار کے ساتھ پھیلانے پر ہمارے پاس ہے

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0-20) + 3(-42-4) + 5(30-0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

قطاروں اور کالموں کو آپس میں بدلنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

پہلے کالم کے ساتھ پھیلانے پر $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0-20) + 3(-42-4) + 5(30-0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

صاف طور پر

اس طرح، خصوصیت، 1، کی تصدیق ہوگئی ہے

خصوصیت 2 اگر ایک مقطعہ کی کوئی بھی دو قطاریں (یا کالم) آپس میں بدل دیئے جائیں۔ تب مقطعہ کی علامت بدل جاتی

ہیں۔

تصدیق، مان لیجیے، $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

پہلی قطار کے ساتھ پھیلانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

پہلی اور تیسری قطاروں کو آپس میں بدلنے پر، حاصل شدہ نیا مقطعہ دیا گیا ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

تیسری قطار کے ساتھ پھیلائے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 (c_2 b_3 - b_2 c_3) - a_2 (c_1 b_3 - c_3 b_1) + a_3 (b_2 c_1 - b_1 c_2) \\ &= -[a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)] \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = -\Delta$$

صاف طور پر

اس طرح ہم نتیجے کی تصدیق کسی بھی دو کالموں کو آپس میں بدلنے سے کر سکتے ہیں۔

نوٹ ہم قطاروں کے آپس میں بدلنے کو $R_i \leftrightarrow R_j$ سے دکھاسکتے ہیں اور آپس میں کالموں کے بدلنے کو $C_i \leftrightarrow C_j$ سے

مثال 7 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ کے خصوصیت '2' کی تصدیق کیجیے۔

حل (مثال 6 کو دیکھئے) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -28$

اور R_3 قطاروں کو آپس میں بدلنے پر یعنی $R_2 \leftrightarrow R_3$ ہمارے پاس ہے

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

پہلی قطار کے ساتھ مقطعہ Δ_1 کو پھیلائے پر ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2(20-0) + 3(4+42) + 5(0-30) \\ &= 40 + 138 - 150 = 28 \end{aligned}$$

صاف طور پر $\Delta_1 = -\Delta$

اس طرح خصوصیت '2' کی تصدیق ہوگئی ہے۔

خصوصیت 3 اگر کسی بھی ایک مقطعہ کی دو قطاریں (یا کالم) بالکل ایک جیسی ہیں (تمام نظیری عناصر ایک ہوں)، تب مقطعہ کی قدر صفر ہوتی ہے۔

ثبوت اگر ہم ایک مقطعہ Δ کے بالکل ایک جیسی قطاروں (یا کالموں) کو آپس میں بدلیں، تب Δ نہیں بدلے گا۔ حالانکہ خصوصیت 2 سے یہ نکلتا ہے کہ Δ اپنی علامت بدل چکا ہے۔

$$\Delta = -\Delta \text{ اس لیے}$$

$$\Delta = 0 \text{ یا}$$

ہمیں اوپر دی ہوئی خصوصیت کی تصدیق ایک مثال سے کرنی چاہئے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ مثال 8 کی قدر کا اندازہ لگائیے۔}$$

حل پہلی قطار کے ہمراہ پھیلائے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = 3(6-6) - 2(6-9) + 3(4-6) \\ = 0 - 2(-3) + 3(-2) = 6 - 6 = 0$$

یہاں R_1 اور R_3 بالکل ایک ہیں۔

خصوصیت 4 اگر ایک مقطعہ کی ایک قطار (یا ایک کالم) کا ہر عنصر ایک مستقل k سے ضرب کیا جائے، تب اس کی قدر بھی k سے ضرب ہو جاتی ہے

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ تصدیق مان لیجیے}$$

اور Δ_1 وہ مقطعہ ہے جو پہلی قطار کے عناصر کو k سے ضرب کرنے پر حاصل ہوا ہے۔

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k a_1 & k b_1 & k c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

پہلی قطار کے ہمراہ پھیلائے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta_1 = k a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - k b_1 (a_2 c_3 - c_2 a_3) + k c_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3) \\ = k [a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - c_2 a_3) + c_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3)]$$

$$\begin{vmatrix} k a_1 & k b_1 & k c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{اس طرح}$$

ریمارکس

- (i) اس خصوصیت کی بنا پر ہم ایک دیئے ہوئے مقطعہ کی کسی بھی قطار یا کالم سے کوئی بھی مشترک اجزائے ضربی نکال سکتے ہیں۔
(ii) اگر ایک ڈیٹرمینینٹ کی کوئی بھی دو قطاریں (یا کالم) کے نظیری عناصر ایک تناسب میں ہوں (یکساں نسبت میں ہیں)، تب اس کی قدر صفر ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ k a_1 & k a_2 & k a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 \text{ اور } R_2 \text{ قطاریں تناسب میں ہے})$$

$$\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{مثال 9 کی قدر معلوم کیجیے}$$

$$\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(17) & 6(3) & 6(6) \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{حل نوٹ کیجیے کہ}$$

(خصوصیت 3 اور 4 کا استعمال کر کے)

خصوصیت 5 اگر ایک مقطعہ کی ایک قطار یا کالم کے کچھ یا تمام عناصر دو (یا زیادہ) ارکانوں کے مجموعہ کے طور پر دکھائیں جائیں۔ تب مقطعہ کو دو (یا زیادہ) مقطعہ کے مجموعہ کے طور پر دکھایا جاسکتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda_1 & a_2 + \lambda_2 & a_3 + \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{مثال کے طور پر،}$$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda_1 & a_2 + \lambda_2 & a_3 + \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{تصدیق}$$

مقطعہ کو پہلی قطار کے ہمراہ کھولنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_1 + \lambda_1) (b_2 c_3 - c_2 b_3) - (a_2 + \lambda_2) (b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ &\quad + (a_3 + \lambda_3) (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &\quad + \lambda_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - \lambda_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + \lambda_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{aligned}$$

(ارکان کی جگہ بدلنے پر)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$$

اسی طرح ہم خصوصیت 5 کی تصدیق دوسری قطاروں اور کالموں کے لئے بھی کر سکتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a + 2x & b + 2y & c + 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{مثال 10 دکھائیے کہ}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a + 2x & b + 2y & c + 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \text{حل ہمارے پاس ہے}$$

خصوصیت 5 کی بنا پر

$$= 0 + 0 = 0 \quad (\text{خصوصیت 3 اور 4 کا استعمال کر کے})$$

خصوصیت 6 اگر ایک مقطعہ کی کسی بھی قطار یا کالم کے ہر ایک عنصر میں دوسری قطار (یا کالم) کے نظیری مساوی اضعاف میں

جمع کیا جائے، تب مقطعہ کی قدر نہیں بدلتی یعنی مقطعہ کی قدر وہی رہتی ہے اگر ہم $C_i \leftrightarrow C_i + kC_j$ یا $R_i \leftrightarrow R_i + kR_j$ لگائیں گے۔

تصدیق

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{اور} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + k c_1 & a_2 + k c_2 & a_3 + k c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مان لیجیے

جہاں Δ_1 عمل $R_1 \rightarrow R_1 + k R_3$ سے حاصل ہوا ہے۔

یہاں، ہم نے تیسری قطار (R_3) کے عناصر کو متقلہ k سے ضرب کیا ہے اور پھر پہلی قطار (R_1) کے مطابق عناصر کو جمع کیا گیا ہے۔
علاقائی طور پر، ہم اس عمل کو اس طرح لکھتے ہیں

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k c_1 & k c_2 & k c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{اب دوبارہ}$$

$$= \Delta + 0 \quad \text{کیونکہ } R_1 \text{ اور } R_3 \text{ تناسب میں ہیں}$$

$$\Delta = \Delta_1 \quad \text{اس لیے}$$

ریمارکس

(i) اگر Δ_1 وہ مقطع ہے جو $R_1 \rightarrow k R_1$ یا $C_1 \rightarrow k C_1$ پر لاگو کرنے کے بعد حاصل ہوا ہے، تب $\Delta_1 = k \Delta$

(ii) اگر ایک سے زیادہ عمل $R_i \rightarrow R_i + k R_j$ کی طرح ایک قدم میں کیا گیا ہے، اس بات پر دھیان دینا ہوگا کہ جو قطار ایک عمل میں اثر انداز ہوئی ہے وہ دوسرے عمل میں استعمال نہیں ہونی چاہئے۔ اس طرح کاریمارک کالم کے عمل میں لاگو ہوتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3 \quad \text{مثال 11 ثابت کیجیے کہ}$$

حل دیئے ہوئے مقطع پر عمل $R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1$ اور $R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1$ لاگو کرنے پر ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

اب $R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2$ لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

C_1 کے ہمراہ پھیلانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = a \begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= a(a^2 - 0) = a(a^2) = a^3$$

مثال 12 بغیر پھیلاؤ کے، ثابت کیجیے کہ

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

حل $R_1 \rightarrow R_1 + R_2$ کو Δ پر لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

کیونکہ R_1 اور R_3 کے عناصر میں تناسب ہے، اس لیے $\Delta = 0$

مثال 13 حساب لگائیے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

حل $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ اور $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ کو لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

اور R_3 سے بالترتیب اجزائے ضربی $(a-b)$ اور $(c-a)$ کو مشترک لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)[(-b+c)] \text{ (پہلے کالم کے ساتھ پھیلائے پر)}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc \text{ مثال 14 ثابت کیجیے کہ}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \text{ حل مان لیجیے کہ}$$

$R_1 \rightarrow R_1 - R_2 - R_3$ کو لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

R_1 کے ساتھ پھیلائے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = 0 \begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c) \begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b) \begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2c(ab + b^2 - bc) - 2b(bc - c^2 - ac)$$

$$= 2abc + 2cb^2 - 2bc^2 - 2b^2c + 2bc^2 + 2abc$$

$$= 4abc$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0 \text{ اگر } x, y, z \text{ مختلف ہیں اور } 15 \text{ مثال}$$

تو دکھائیے کہ، $1+xy=0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} \text{ حل ہمارے پاس ہے}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \text{ (خصوصیت 5 کا استعمال کرنے پر)}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad (\text{پہلے } C_3 \leftrightarrow C_2 \text{ کا استعمال کرنے پر اور پھر } C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ کا})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} (1 + xyz)$$

$$= (1 + xyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} \quad (\text{پھر } R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \text{ اور } R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \text{ کا استعمال کرنے پر})$$

R_2 سے $(y-x)$ اور R_3 سے $(z-x)$ مشترک اجزائے ضربی نکالنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = (1 + xyz) (y-x) (z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}$$

$(C_1$ کے ساتھ پھیلائے پر) $(1 + xyz) (y-x) (z-x) (z-x)$

کیونکہ $\Delta = 0$ اور تمام x, y, z مختلف ہیں یعنی $x-y \neq 0, y-z \neq 0, z-x \neq 0$ ہمیں حاصل ہوتا ہے $1 + xyz = 0$

مثال 16 دکھائیے کہ

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = abc + bc + ca + ab$$

حل R_1, R_2, R_3 سے مشترک اجزائے ضربی a, b, c باہر نکالنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{L.H.S.} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a} + 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} + 1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} + 1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$ لاگو کرنے پر ہمارے پاس

$$\Delta = abc \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} & 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} & 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} + 1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} + 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} + 1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} + 1 \end{vmatrix}$$

اب $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$ ، $C_2 \rightarrow C_2 - C_1$ کو لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) [1(1-0)]$$

$$= abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = abc + bc + ca + ab = \text{R.H.S.}$$

نوٹ اس کے متبادل $C_1 \rightarrow C_1 - C_2$ اور $C_3 \rightarrow C_3 - C_2$ کو لاگو کرنے پر، اس کے بعد $C_1 \rightarrow C_1 - aC_2$ لاگو کیجئے۔

مشق 4.2

مقطعہ کی خصوصیت کا استعمال کر کے اور مشق 1 تا 7 کو بغیر پھیلائے ہوئے، ثابت کیجئے کہ۔

1. $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0 \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

$$5. \begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad 7. \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2$$

مشق 8 تا 14 میں مقطع کی خصوصیات کا استعمال کر کے، دکھائیے کہ

$$8. (i) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

$$9. \begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

$$10. (i) \begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$$

$$(ii) \begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$$

$$11. (i) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

ریاضی 134

$$(ii) \begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

$$12. \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$$

$$13. \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

$$14. \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

15 تا 16 مشقوں میں صحیح جواب چنیے۔

15- مان لیجیے A ایک 3×3 ترتیب کی مربع ماتر ہے، تب $|KA|$ برابر ہے

- (A) $k|A|$ (B) $k^2|A|$ (C) $k^3|A|$ (D) $3k|A|$

16- ذیل میں کون سا صحیح ہے۔

(A) مقطعہ ایک مربع ماتر ہے۔

(B) مقطعہ ماتر کے ساتھ جڑا ہوا عمود ہے۔

(C) مقطعہ مربع ماتر کے ساتھ جڑا ہوا عمود ہے۔

(D) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

4.4 ایک مثلث کا رقبہ (Area of a Triangle)

ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ ایک مثلث کا رقبہ جس کے راس (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) ہوں، عبارت سے دیا گیا ہے، اب یہ عبارت مقطعہ کی شکل میں اس

$$= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \dots(1)$$

ریمارکس

- (i) کیونکہ رقبہ ایک مثبت تعداد ہے، ہم ڈیٹرمنینٹ 1 کی ہمیشہ مطلق قدر لیتے ہیں۔
- (ii) اگر رقبہ دیا ہوا ہے، حساب لگانے کے لیے ڈیٹرمنینٹ کی دونوں قدریں مثبت اور منفی استعمال کیجیے۔
- (iii) تین، ہم خط نقطوں سے بننے والا رقبہ صفر ہے۔

مثال 17 اس مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس (3,8)، (-4,2) اور (5,1) ہیں۔

حل مثلث کا رقبہ دیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)] \\ &= \frac{1}{2} (3 + 72 - 14) = \frac{61}{2} \end{aligned}$$

مثال 18 مقطعہ کا استعمال کر کے اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط A(1,3) اور B(0,0) کے ملنے سے بنتا ہے اور k معلوم

کیجیے اگر D(k,0) ایک نقطہ ہے تاکہ مثلث ABD کا رقبہ 3 مربع اکائیاں ہے۔

حل مان لیجیے AB، P(x, y) پر کوئی بھی نقطہ ہے۔ تب مثلث ABP کا رقبہ صفر ہے (کیوں؟) اس لیے

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$y = 3x \text{ یا } \frac{1}{2}(y - 3x) = 0 \text{ یہ دیتا ہے}$$

جو کہ خط AB کی مطوبہ مساوات ہے۔

ساتھ ہی کیونکہ مثلث ABD کا رقبہ 3 مربع اکائیاں ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3$$

$$k = \pm 2 \text{ یعنی } \frac{-3k}{2} = \pm 3$$

مشق 4.3

1- ذیل میں سے ہر ایک میں مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جن کے راس ان نقطوں پر ہیں۔

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3)

(ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (-2, -3), (3, 2), (-1, -8)

2- دکھائیے کہ نقطے

A (a, b+c), B (b, c+a), C(c, a+b) ہم خط ہیں۔

3- k کی قدریں معلوم کیجیے اگر مثلث کا رقبہ 4 مربع اکائی ہے اور اس کے راس یہ ہیں۔

(i) (k, 0), (4, 0), (0, 2)

(ii) (-2, 0), (0, 4), (0, k)

4- (i) مقطعہ کا استعمال کر کے اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط (1,2) اور (3,6) کو ملانے سے بنتی ہے

(ii) مقطعہ کا استعمال کر کے اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط (3,1) اور (9,3) کو ملانے سے بنتی ہے۔

5- اگر ایک مثلث کا رقبہ 35 مربع اکائیاں ہیں جس کے راس (2-6)، (5,4) اور (k,4) تب k ہے۔

(A) 12

(B) -2

(C) -12, -2

(D) 12, -2

4.5 صغیرے (Minors) اور ہم ضربی (Cofactors)

اس حصہ میں مقطعہ کے پھیلاؤ کو جامع شکل میں لکھنے کے بارے میں صغیرے اور ہم ضربی کا استعمال کریں گے۔

تعریف 1 ایک مقطعہ کے ایک عنصر a_{ij} کا اصغریک مقطعہ سے ہے جو اس کی ith قطار اور jth کالم کو نکالنے سے ملتا ہے

جس میں a_{ij} موجود ہے۔ a_{ij} صفر کو M_{ij} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ریمارک ایک n رتبہ جہاں $(n \geq 2)$ والے مقطعہ کے ایک عنصر کا صغیر $(n-1)$ رتبہ کا ایک مقطعہ ہے۔

مثال 19 مقطعہ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ میں عنصر 6 کا صغیر معلوم کیجیے۔

حل کیونکہ 6 دوسری قطار اور تیسرے کام میں موجود ہے، اس کا M_{23} دیا گیا ہے۔

$$\Delta \text{ میں } R_2 \text{ اور } C_3 \text{ کے نکالنے سے حاصل ہوا ہے۔ } M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$$

تعریف 2 عنصر a_{ij} کو ہم ضربی، جو کہ A_{ij} سے ظاہر کیا گیا ہے اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

جہاں M_{ij} ، A_{ij} کا صغیر ہے $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

مثال 20 مقطعہ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ کے تمام عناصر کے صغیر اور ہم ضربی معلوم کیجیے۔

حل عنصر a_{ij} کا صغیر M_{ij} ہے۔

یہاں $a_{11} = 1$ ہے اس لیے $a_{11} = m_{11}$ کا صغیر 3

$$M_{12} = \text{عنصر } a_{12} \text{ کا صغیر} = 4$$

$$M_{21} = \text{عنصر } a_{21} \text{ کا صغیر} = -2$$

$$M_{22} = \text{عنصر } a_{22} \text{ کا صغیر} = 1$$

اب a_{ij} کا ہم ضربی A_{ij} ہے۔ اس طرح

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$$

مثال 21 عناصر a_{12} ، a_{11} کے صغیر اور ہم ضربی درج ذیل مقطعہ میں معلوم کیجیے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل صغیرے اور ہم ضربی کی تعریف سے، ہمارے پاس ہے

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11} = \text{کا صغیر } a_{11}$$

$$a_{11} = A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} = A_{11} = \text{کا ہم ضربی } a_{11}$$

$$a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{21} = \text{کا صغیر } a_{21}$$

$$(-1)^{2+1} M_{21} = (-1) (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) = -a_{12} a_{33} + a_{13} a_{32} = A_{21} = \text{کا ہم ضربی } a_{21}$$

ریمارک مثال 21 میں موجود مقطع Δ کو R_1 کے ساتھ پھیلانے، پر ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

جہاں A_{ij} ، a_{ij} کے ہم ضربی ہے، $a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} =$

اسی طرح، Δ کی تحسب پھیلاؤ کے دوسرے پانچ طریقوں سے کی جاسکتی ہے اس کا مطلب ہے

R_2 ، R_3 ، C_1 اور C_3 کے ساتھ

اس طرح $\Delta =$ کسی بھی قطار (یا کالم) کے عناصر کا ان کے نظیری ہم ضربی کے حاصل ضرب کا حاصل جمع ہے۔

نوٹ اگر ایک قطار (یا کالم) کے عناصر کسی بھی دوسری قطار (یا کالم) ہم ضربی سے ضرب کیا جائے تب ان کا

مجموعی صفر ہے۔ مثال کے طور پر $\Delta = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}$

$$= a_{11} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{کیونکہ } R_1 \text{ اور } R_2 \text{ متماثل ہے})$$

اسی طرح، ہم دوسری قطاروں اور کالموں کے لیے کوشش کر سکتے ہیں۔

مثال 22 مقطعہ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ کے عناصر کے صغیرے اور ہم ضربی معلوم کیجیے اور تصدیق کیجیے کہ

$$a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0$$

حل ہمارے پاس ہے

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20; \quad A_{11} = (-1)^{1+1} (-20) = -20$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} (-46) = 46$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} (30) = 30$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} (-4) = 4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} (-19) = -19$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} (13) = -13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} (-12) = -12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} (-22) = 22$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} (18) = 18$$

$$اب \quad a_{11} = 2, \quad a_{12} = -3, \quad a_{13} = 5; \quad A_{31} = -12, \quad A_{32} = 22, \quad A_{33} = 18$$

$$تاکہ \quad a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$$

$$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$$

مشق 4.4

ذیل مقطعہ کے عناصر کے صغیر اور ہم ضربی لکھیے۔

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3- دوسری قطار کے عناصر کے ہم ضربی کا استعمال کر کے، $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ کی قیمت لکھیے۔

4- تیسرے کالم کے عناصر کے ہم ضربی کا استعمال کر کے، $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ معلوم کیجیے۔

5- اگر $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ اور A_{ij} ، a_{ij} کا ہم ضربی ہے، تب Δ کی قدر اس سے دی گئی ہے

(A) $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$ (B) $a_{11} A_{11} + a_{12} A_{21} + a_{13} A_{31}$
(C) $a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13}$ (D) $a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$

4.6 ایک ماترِس کا شریک اور معکوس (Adjoint and Inverse of a Matrix)

پچھلے باب میں ہم ماترِس کے معکوس کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ اس حصہ میں ہم ماترِس کے معکوس کے وجود کی شرائط پر بحث و مباحثہ کریں گے۔

ماترِس A کا معکوس دریافت کرنے کے لئے، یعنی A^{-1} ، ہم پہلے ایک ماترِس کے شریک کی تعریف بیان کریں گے۔

4.6.1 ایک ماترِس کا شریک (Adjoint of a matrix)

تعریف 3 ایک مربع ماترِس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ کا شریک $[A_{ij}]_{n \times n}$ کے پلٹاؤ کے طور پر معرف کیا جاتا ہے، جہاں A_{ij} ، عنصر

کا ہم ضربی ہے، ماترِس A کا شریک $adj A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ مان لیجئے}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \text{کاپلاؤ} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = adj A \text{ تب}$$

مثال 23 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ کے لیے $adj A$ معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $A_{11} = 4, A_{12} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 2$

$$adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ اس لئے،}$$

ریمارک ایک رتبہ 2 مربع ماترِس کے لیے، جو کہ دی گئی

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ سے}$$

$adj A$ اور a_{11} اور a_{22} کو آپس میں بدلنے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے اور a_{12} اور a_{21} کی علامتیں بدلنے سے، یعنی

$$adj A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

آپس میں بدلنا علامت کا بدلنا

ہم ذیل مسئلہ کو بغیر ثبوت کے بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 1 اگر A درجہ n کی کوئی دی ہوئی ماترِس درجہ n کی ہے، تب

$$A(adj A) = (adj A) A = |A| I$$

$$adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ تب، } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ تصدیق مان لیجئے}$$

کیونکہ ایک قطار (یا کالم) کے عناصر کا ان کے نظیری ہم ضربی کے حاصل ضرب کا مجموعہ $|A|$ کے برابر ہے یا پھر صفر ہے تو ہمارے پاس ہے۔

$$A (adj A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I$$

اسی طرح، ہم دکھا سکتے ہیں کہ $(adj A) A = |A| I$

اس لیے $A (adj A) = (adj A) A = |A| I$

تعریف 4 ایک مربع ماتر A ایک نادر Singular ماتر کہلاتی ہے اگر $|A| = 0$

مثال کے طور پر، ماتر A کا مقطع $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = A$ ہے۔

اس لیے A ایک نادر متار ہے۔

تعریف 5 ایک مربع ماتر A ، ایک غیر نادر ماتر کہلاتی ہے اگر $|A| \neq 0$

مان لیجیے $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$ تب $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

اس لیے A ایک غیر نادر ماتر ہے۔

ہم ذیل مسئلوں کو بغیر ثبوت کے بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 2 اگر A اور B یکساں ترتیب کی غیر نادر ماتر ہیں۔ تب AB اور BA بھی یکساں ترتیب کی غیر نادر ماتر ہیں۔

مسئلہ 3 ماتروں کو حاصل ضرب کا ڈیٹرمیننٹ ان کے اپنے الگ الگ ڈیٹرمیننٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہے

یعنی $|A| \cdot |B| = |AB|$ ، جہاں A اور B یکساں ترتیب والے مربع ماتر ہیں۔

ریمارک ہم جانتے ہیں کہ

$$(adj A) A = |A| I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

ماترس کے دونوں طرف مقطعہ لکھنے پر، ہمارے پاس ہے

$$|(adj A) A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

$$\text{یعنی } |(adj A) A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{کیوں؟})$$

$$\text{یعنی } |(adj A) A| = |A|^3 \quad (1)$$

$$\text{یعنی } |adj A| = |A|^2$$

عام طور پر اگر A ایک رتبہ n کی مربع ماترس ہے، تب $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

مسئلہ 4 ایک مربع ماترس A قابلِ انعکس ہے اگر A غیر نادر ماترس ہے۔

ثبوت مان لیجیے A ایک رتبہ n کی قابلِ انعکس ماترس ہے اور I رتبہ n کی متاثلہ ماترس ہے۔

تب n رتبہ کی ایک مربع ماترس n رتبہ کا وجود ہے تاکہ $I = BA = AB$

کیونکہ $AB = I$ یا $|AB| = |I|$ یا $|A| |B| = 1$ ($|A| = 1, |B| = |A|$)

یہ دیتا ہے $|A| \neq 0$ اس لیے A غیر نادر ماترس ہے

اس کے برعکس، مان لیجیے A ایک غیر نادر ہے۔ تب $|A| \neq 0$

$$A(adj A) = (adj A)A = |A|I \quad (\text{مسئلہ 1})$$

$$A \left(\frac{1}{|A|} adj A \right) = \left(\frac{1}{|A|} adj A \right) A = I$$

$$AB = BA = I \text{ جہاں } B = \frac{1}{|A|} adj A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A \text{ اس طرح } A \text{ قابلِ انعکس ہے اور}$$

مثال 24 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہے، تب تصدیق کیجیے کہ $A adj A = |A|I$ ۔ ساتھ ہی A^{-1} معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $|A| = 1(16-9) - 3(4-3) + 3(3-4) = 1 \neq 0$

اب $A_{11}=7, A_{12}=-1, A_{13}=-1, A_{21}=-3, A_{22}=1, A_{23}=0, A_{31}=-3, A_{32}=0, A_{33}=1$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ اس لئے}$$

$$A (\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ اب}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (I) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \cdot I$$

$$|A|^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ساتھ ہی}$$

مثال 25 اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ہو، تب تصدیق کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix} \text{ حل ہمارے پاس ہے}$$

موجود ہے $(AB)^{-1}$ کیونکہ $|AB| = -11 \neq 0$ ، اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \text{adj } (AB) = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

اس کے آگے $|A| = -11 \neq 0$ اور $|B| = 1 \neq 0$ اس لیے A^{-1} اور B^{-1} دونوں وجود میں ہیں اور اس طرح دیے گئے ہیں۔

$$A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ اس لیے}$$

اس کا مطلب ہے $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
مثال 26 دکھائیے کہ ماترِس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مساوات $A^2 - 4A + I = O$ کو مطمئن کرتی ہے جہاں 'I' ایک

2×2 اکائی ماترِس ہے اور O ایک 2×2 صفر ماترِس ہے۔ اس مساوات کا استعمال کر کے A^{-1} دریافت کیجیے۔

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ حل ہمارے پاس ہے}$$

$$A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$A^2 - 4A + I = O$$

$$A A - 4A = -I$$

$$A A (A^{-1}) - 4 A A^{-1} = -I A^{-1} \quad (|A| \neq 0 \text{ کیونکہ پہلے ضرب کرنے پر، کیونکہ } |A| \neq 0)$$

$$A (A A^{-1}) - 4I = -A^{-1}$$

$$A I - 4I = -A^{-1}$$

$$A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ اس لیے}$$

مشق 4.5

مشق '1' اور '2' میں ہر ایک ماترِس کا شریک معلوم کیجیے۔

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مشق 3 اور 4 میں تصدیق کیجیے کہ $A (\text{adj } A) = (\text{adj } A) A = |A| I$

$$3. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

دی ہوئی مشقوں 5 تا 11 میں ہر ایک ماترِس کا معکوس دریافت کیجیے (اگر موجود ہے)

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$

12- مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ہیں۔ تصدیق کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

13- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہے۔ دکھائیے کہ $A^2 - 5A + 7I = O$ ۔ اس طرح A^{-1} دریافت کیجیے۔

14- ماترِس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ کے لیے a اور b اعداد کیجیے تاکہ $A^2 + aA + bI = O$ ۔

15- ماترِس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ کے لیے۔

دکھائیے کہ $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = O$ اس طرح A^{-1} دریافت کیجیے۔

16- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہے، تصدیق کیجیے کہ $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ ہے اور اس طرح

دریافت کیجیے۔

17- مان لیجیے A ایک غیر نادر 3×3 کی مربع ماترِس ہے۔ تب $|adj A|$ برابر ہے

(A) $|A|$

(B) $|A|^2$

(C) $|A|^3$

(D) $3|A|$

18- ایک A رتبہ 2 کی قابلِ تَعْلِیس ماترِس ہے، تب $\det(A^{-1})$ برابر ہے۔

(A) $\det(A)$

(B) $\frac{1}{\det(A)}$

(C) 1

(D) 0

4.7 مقطعہ اور ماترس کے استعمال

اس حصہ میں ہم قابلِ تکلیس اور ماترس کے اطلاق کے لیے دو یا تین متغیر والی خطی مساواتوں کو حل کرنے کے نظام پر بحث و مباحثہ کریں گے اور خطی مساواتوں کے نظام کی ہم آہنگی کی جانچ کریں گے۔

ہم آہنگ نظام (Consistent system) مساواتوں کا ایک نظام آہنگ کہلاتا ہے اگر اس کے حل (ایک یا زیادہ) وجود میں ہوں۔

غیر ہم آہنگ نظام (Inconsistent system) مساواتوں کا ایک نظام غیر ہم آہنگ کہلاتا ہے اگر اس کے حل موجود نہ ہوں۔

نوٹ اس باب میں ہم اپنے آپ کو خطی مساواتوں کے نظام تک ہی محدود رکھیں گے جن کا صرف ایک ہی حل ہو۔

4.7.1 ایک ماترس کے معکوس کا استعمال کر کے خطی مساواتوں کے نظام کا حل

ہمیں خطی مساواتوں کا نظام کو ماترس مساواتوں میں ظاہر کرنا چاہئے اور انہیں ماترس کے معکوس کا استعمال کر کے حل کرنا چاہئے۔

مساواتوں کے نظام پر غور کیجیے۔

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

$$\text{مان لیجیے کہ } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \text{ اور } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تب، مساوات کا نظام اس طرح لکھا جاسکتا ہے، $AX=B$ ، یعنی

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

کیس I اگر A ایک غیر نادر ماتریس ہے۔ تب اس کا معکوس موجود ہے۔ اب

$$AX = B$$

$$A^{-1} \text{ سے پہلے ضرب کرنے پر } (AX) = A^{-1} B \text{ یا}$$

$$(A^{-1}A) X = A^{-1} B \text{ (تلازمی خصوصیت سے) یا}$$

$$I X = A^{-1} B \text{ یا}$$

$$X = A^{-1} B \text{ یا}$$

یہ ماتریس مساوات دی ہوئی مساوات کے نظام کے لیے منفرد حل دستیاب کراتا ہے جیسا کہ ایک ماتریس کا معکوس منفرد ہے۔ یہ مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کا طریقہ ماتریس طریقہ کہلاتا ہے۔

کیس II اگر A ایک نادر ماتریس ہے، تب $0 = |A|$

اس کیس (مسئلہ) میں، ہم $(adj A) B$ کی تحسیب کرتے ہیں۔

اگر $(adj A) B \neq 0$ ، (کیونکہ O صفر ماتریس ہے)، تب حل موجود نہیں ہے اور مساواتوں کا نظام غیر ہم آہنگ ہے۔

اگر $(adj A) B = 0$ ہے تب نظام ہم آہنگ یا غیر ہو سکتا ہے یعنی نظام یا تو بہت سے حل رکھتا ہے یا کوئی حل نہیں رکھتا ہے۔

مثال 27 مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے

$$2x + 5y = 1$$

$$3x + 2y = 7$$

حل مساواتوں کا نظام $AX = B$ شکل میں لکھا جاسکتا ہے، جہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

اب، $|A| = -11 \neq 0$ ، اس طرح A ایک غیر نادر ماتریس ہے اور اس لیے اس کا منفرد حل ہے

$$A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ یہ نوٹ کر لیجیے کہ}$$

$$X = A^{-1} B = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ اس لئے}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ یعنی}$$

اس طرح $x=3$ ، $y=-1$

مثال 28 ذیل مساواتوں کا نظام ماترِس کے طریقے سے حل کیجیے۔

حل مساواتوں کا نظام $AX=B$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے، جہاں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ہم دیکھتے ہیں

$$|A| = 3(2-3) + 2(4+4) + 3(-6-4) = -17 \neq 0$$

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -10$$

$$A_{21} = -5, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = 1$$

$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 9, \quad A_{33} = 7$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ اس لیے}$$

$$X = A^{-1} B = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ تاکہ}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ یعنی}$$

اس لیے $x=1$ ، $y=2$ اور $z=3$

مثال 29 تین اعداد کا مجموعہ 6 ہے۔ اگر ہم تیسرے عدد کو 3 سے ضرب کریں اور اس میں دوسرے عدد کو جمع کر دیں تو ہمیں

11 حاصل ہوتا ہے۔ پہلے اور تیسرے اعداد کو جمع کرنے سے ہمیں دوسرے عدد کا دوگنا حاصل ہوتا ہے۔ اسے الجبرا کے طور پر دکھائیے اور اعداد کو ماتریس کا طریقہ استعمال کر کے دریافت کیجئے۔

حل مان لیجیے، پہلے دوسرے اور تیسرے اعداد کو بالترتیب x, y اور z سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب دیئے ہوئے حالات کے مطابق ہمارے پاس ہے۔

$$x + y + z = 6$$

$$y + 3z = 11$$

$$x - 2y + z = 0 \text{ اور } x + z = 2y$$

اس نظام کو $AX = B$ کی طرح لکھا جاسکتا ہے۔ جہاں

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یہاں، $|A| = 1(1+6) - (0-3) + (0-1) = 9 \neq 0$ ، اب ہم $adj A$ دریافت کرتے ہیں۔

$$A_{11} = 1(1+6) = 7,$$

$$A_{12} = -(0-3) = 3,$$

$$A_{13} = -1$$

$$A_{21} = -(1+2) = -3,$$

$$A_{22} = 0,$$

$$A_{23} = -(-2-1) = 3$$

$$A_{31} = (3-1) = 2,$$

$$A_{32} = -(3-0) = -3,$$

$$A_{33} = (1-0) = 1$$

$$adj A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

اس لیے

$$A^{-1} \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

اس طرح

$$X = A^{-1} B$$

کیونکہ

$$X = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{یا } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 42 - 33 + 0 \\ 18 + 0 + 0 \\ -6 + 33 + 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

اس طرح $x=1, y=2, z=3$ ہے

مشق 4.6

مشق 1 تا 6 میں مساوات کے نظام کی ہم آہنگی کی جانچ کیجیے۔

1. $x+2y=2$

$2x+3y=3$

2. $2x-y=5$

$x+y=4$

3. $x+3y=5$

$2x+6y=8$

4. $x+y+z=1$

$2x+3y+2z=2$

$ax+ay+2az=4$

5. $3x-y-2z=2$

$2y-z=-1$

$3x-5y=3$

6. $5x-y+4z=5$

$2x+3y+5z=2$

$5x-2y+6z=-1$

مشق 7 تا 17 میں ماترں طریقے کا استعمال کر کے خطی مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

7. $5x+2y=4$

$7x+3y=5$

8. $2x-y=-2$

$3x+4y=3$

9. $4x-3y=3$

$3x-5y=7$

10. $5x+2y=3$

$3x+2y=5$

$3y-5z=9$

14. $x-y+2z=7$

$3x+4y-5z=-5$

11. $2x+y+z=1$

$x-2y-z=\frac{3}{2}$

$3y-5z=9$

$x-2y+z=-4$

$2x-y+3z=12$

12. $x-y+z=4$

$2x+y-3z=0$

$x+y+z=2$

13. $2x+3y+3z=5$

$x-2y+z=-4$

$3x-y-2z=3$

15- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ہو، تو A^{-1} معلوم کیجیے۔ A^{-1} کا استعمال کر کے مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

$2x-3y+5z=11$

$3x+2y-4z=-5$

$x+y-2z=-3$

16- 4 کلوگرام پیاز، 3 کلوگرام گیہوں اور 2 کلوگرام چاول کی قیمت 60 روپے ہے۔ 2 کلوگرام پیاز، 4 کلوگرام گیہوں

اور 6 کلوگرام چاول کی قیمت 90 روپے ہے۔ 6 کلوگرام پیاز، 2 کلوگرام گیہوں اور 3 کلوگرام چاول کی قیمت 70 روپے ہے۔ ماتر س طریقے کا استعمال کر کے ہر اشیاء کی فی کلوگرام قیمت دریافت کیجئے۔

متفرق مثالیں

مثال 30 اگر a, b, c مثبت اور غیر برابر ہیں، دکھائیے کہ مقطع $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ کی قدر منفی ہے۔

حل دیئے ہوئے مقطع پر $C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$ لاگو کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} \quad (R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \text{ اور } R_2 \rightarrow R_2 - R_1)$$

$$= (a+b+c) [(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)] \quad (C_1 \text{ کے ساتھ پھیلائے پر})$$

$$= (a+b+c)(-a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

جو کہ منفی ہے (کیونکہ $a+b+c > 0$ اور $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$)

مثال 31 اگر a, b, c A.P. میں ہیں، قدر معلوم کیجئے۔

$$\begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$

حل دیئے ہوئے مقطع پر $R_1 \rightarrow R_1 + R_3 - 2R_2$ لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{کیونکہ } 2b = a + c \text{ کے لیے})$$

مثال 32 دکھائیے کہ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z) & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3$$

حل Δ پر $R_1 \rightarrow xR_1, R_2 \rightarrow yR_2, R_3 \rightarrow zR_3$ لاگو کرنے پر اور پھر xyz سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2y & x^2z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$

C_1, C_2 اور C_3 سے بالترتیب مشترک اجزائے ضربی x, y, z لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz} \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$C_2 \rightarrow C_2 - C_1, C_3 \rightarrow C_3 - C_1$ لاگو کرنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 - (y+z)^2 & x^2 - (y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2 - y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2 - z^2 \end{vmatrix}$$

C_2 اور C_3 مشترک اجزائے ضربی $(x+y+z)$ لینے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x - (y+z) & x - (y+z) \\ y^2 & (x+z) - y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y) - z \end{vmatrix}$$

$R_1 \rightarrow R_1 - (R_2 + R_3)$ لاگو کرنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow \left(C_3 + \frac{1}{2}C_1\right) \text{ اور } C_2 \rightarrow \left(C_2 + \frac{1}{y}C_1\right)$$

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$

آخر میں R_1 کے ساتھ پھیلانے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = (x+y+z)^2 (2yz) [(x+z)(x+y) - yz] = (x+y+z)^2 (2yz) (x^2 + xy + xz) = (x+y+z)^3 (2xyz)$$

مثال 33 حاصل ضرب کا استعمال کر کے ذیل مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$x - y + 2z = 1$$

$$2y - 3z = 1$$

$$3x - 2y + 4z = 2$$

حل حاصل ضرب پر غور کیجیے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 - 9 + 12 & 0 - 2 + 2 & 1 + 3 - 4 \\ 0 + 18 - 18 & 0 + 4 - 3 & 0 - 6 + 6 \\ -6 - 18 + 24 & 0 - 4 + 4 & 3 + 6 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

اسی طرح

اب مساوات کا دیا ہوا نظام، ماتریس کی شکل اس طرح لکھا جاسکتا ہے، جیسا کہ دیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

اس طرح $x=0, y=5$ اور $z=3$ ہے۔

مثال 34 ثابت کیجیے کہ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

حل $R_1 \rightarrow R_1 - x R_2$ کو Δ پر لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

باب 4 پر مبنی متفرق مشق

1- ثابت کیجیے کہ مقطع θ سے مبرہ ہے۔

$$\begin{vmatrix} x & \sin \theta & \cos \theta \\ -\sin \theta & -x & 1 \\ \cos \theta & 1 & x \end{vmatrix}$$

2- مقطع کو بغیر پھیلائے ہوئے، ثابت کیجیے کہ

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

3- کی قدر معلوم کیجیے۔

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

4- اگر a, b, c حقیقی اعداد ہیں اور $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$ تو دکھائیے کہ $a+b+c=0$ یا $a=b=c$ ہے۔

5- مساوات $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0, a \neq 0$ کو حل کیجیے۔

6- ثابت کیجیے $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

7- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ تو $(AB)^{-1}$ معلوم کیجیے۔

8- مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ تو تصدیق کیجیے کہ

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(i) $[adj A]^{-1} = adj (A^{-1})$

$$-9 \quad \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \text{ کی قدر معلوم کیجیے۔}$$

$$-10 \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix} \text{ کی قدر معلوم کیجیے۔}$$

مشق 11 تا 15 میں مقطع کی خصوصیات کا استعمال کر کے، ثابت کیجیے کہ

$$-11 \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta + \gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma + \alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$-12 \quad \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x) \text{ جہاں } p \text{ کوئی بھی عددیہ ہے۔}$$

$$-13 \quad \begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$14. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1 \quad 15. \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \cos(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \cos(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \cos(\gamma + \delta) \end{vmatrix} = 0$$

-16 مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

مشق 17 تا 19 میں صحیح جواب چنیے

-17 اگر $A.P. a, b, c$ میں ہیں۔ تب مقطع

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$$

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) 2x ہے۔

18- اگر x, y, z غیر صفر اعداد ہیں، تب ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ کا معکوس ہے۔

$$\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (A) \quad \text{xyz} \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (B)$$

$$\frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (D) \quad \frac{1}{xyz} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \quad (C)$$

19- مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta & 1 \\ -\sin \theta & 1 & \sin \theta \\ -1 & -\sin \theta & 1 \end{bmatrix}$ جہاں $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ہے۔ تب

- (A) $\text{Det}(A)=0$ (B) $\text{Det}(A) \in (2, \infty)$
(C) $\text{Det}(A) \in (2, 4)$ (D) $\text{Det}(A) \in [2, 4]$

خلاصہ

♦ ماتریس $A = [a_{ij}]_{1 \times 1}$ کا مقطع $|a_{11}| = a_{11}$ سے دیا گیا ہے۔

♦ ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ کا مقطع

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

♦ ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ کا مقطع دیا گیا ہے (R_1 کے ہمراہ پھیلانے پر)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

کسی بھی مربع ماترِس A کے لئے |A| ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔

- ◆ اگر $A' = A$ ، جہاں $A' = |A|$ کا پلٹاؤ
- ◆ اگر ہم دو قطاروں (یا کالموں) کو آپس میں بدلیں تب مقطعہ کی علامت بدل جاتی ہے۔
- ◆ اگر کوئی بھی دو قطاریں یا کالم یکساں یا تناسب میں ہیں، تب مقطعہ کی قدر صفر ہوتی ہے۔
- ◆ اگر ہم ایک مقطعہ کی ایک قطار یا ایک کالم کے ہر ایک عنصر کو ایک مستقل K سے ضرب کریں، تب مقطعہ کی قدر K سے ضرب ہو جائے گی۔
- ◆ ایک مقطعہ کو k سے ضرب کرنے کا مطلب ہے صرف ایک قطار (یا ایک کالم) کو k سے ضرب کرتا ہے۔
- ◆ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، تب $|k \cdot A| = k^3 |A|$
- ◆ اگر ایک مقطعہ کی ایک قطار یا کالم کے عناصر کو دو یا دو سے زیادہ عناصر کے مجموعہ کے طور پر دکھایا جاسکے تب دیا ہوا مقطعہ دو یا دو سے زیادہ مقطعہ کے مجموعہ کے طور پر دکھایا جاسکتا ہے۔
- ◆ اگر ایک مقطعہ کی ایک قطار یا ایک کالم کے ہر ایک عنصر کے ساتھ دوسری قطاروں یا کالموں کے نظیری عناصر کے برابر ضرب والے عناصر کو جمع کیا جائے، تب مقطعہ کی قدر نہیں بدلتی۔
- ◆ راس (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) والے مثلث کا رقبہ دیا گیا ہے۔
- ◆ $\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$
- ◆ ایک ماترِس A کے مقطعہ کے عنصر a_{ij} کے صغیرے وہ مقطعہ ہے جو i^{th} قطار اور j^{th} کالم کو نکالنے سے مقطعہ بنتا ہے اور جسے M_{ij} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- ◆ a_{ij} کے ہم ضربی $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ہے۔

- ◆ ایک ماتر A کے مقطعہ کی قدر اس کی ایک قطار (یا ایک کالم) کے عناصر کی ان کے نظیری ہم ضربی حاصل ضرب کے مجموعہ سے حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر

$$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

- ◆ اگر ایک قطار (یا کالم) کے عناصر کو کسی بھی دوسری قطار (یا کالم) کے عناصر کے ہم ضربیوں سے ضرب کیا جائے، تب ان کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$= a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$$

- ◆ اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ، تب $\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ جہاں A_{ij} ، a_{ij} کے ہم ضربی ہے۔

- ◆ $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I$ ، جہاں A ، ایک ترتیب n کی مربع ماتر ہے۔

- ◆ ایک مربع ماتر A کو نادر یا غیر نادر کہا جاسکتا ہے کہ جیسا کہ $|A| \neq 0$ یا $|A| = 0$ ہے۔

$$\text{ساتھ } A^{-1} = B \text{ یا } B^{-1} = A \text{ اور اس طرح } (A^{-1})^{-1} = A$$

- ◆ ایک مربع ماتر A کا معکوس موجود ہوتا ہے اگر اور صرف اگر A ایک غیر نادر ہے۔

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj } A)$$

$$\text{اگر } a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3,$$

تب ان مساوات کو $AX = B$ کی طرح لکھا جاسکتا ہے جنہیں

$$B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- ◆ مساوات $AX = B$ کا منفرد حل $A = A^{-1}B$ سے حاصل ہوتا ہے، جہاں $|A| \neq 0$ ہے۔

- ◆ مساوات کا ایک نظام ہم آہنگ یا غیر ہم آہنگ ہوتا ہے جیسا کہ اس کا حل موجود ہوتا ہے یا نہیں ایک ماتر مساوات

$$AX = B \text{ میں مربع ماتر } A \text{ کے لیے۔}$$

$$(i) |A| \neq 0 \text{ ایک منفرد حل موجود ہے۔}$$

(ii) $|A|=0$ اور $(adj A) B \neq 0$ ، تب کوئی حل موجود نہیں ہے۔

(iii) $|A|=0$ اور $(adj A) B = 0$ ، تب نظام ہم آہنگ یا غیر ہم آہنگ ہو سکتا ہے۔

تاریخ کے اوراق (Historical Note)

بہت سی خطی مساواتوں کے غیر پہچانے والے ضریب کو دکھانے کا چینی طریقہ ایک حل کرنے والے بورڈ پر چھڑیوں کا استعمال کر کے اخراج کے سادہ طریقے کی کھوج کی طرف لے جاتی ہے۔ چھڑیوں کا انتظام صاف طور پر ڈیٹرمنینٹ میں موجود اعداد کی تعداد ہے۔ اس لئے چین کے رہنے والوں نے کالم اور قطاروں کو گھٹانے کا تصور پہلے ہی پیدا کر لیا تھا جیسا کہ ڈیٹرمنینٹ کو آسان کرنے میں، میکائی 'چین' pp 30, 93۔

سیکی کو، ساتویں صدی کے عظیم ریاضی دان نے اپنے کام ”کائے نو کو دائے نو ہو“ نے 1683 میں دکھایا تھا کہ اس کے پاس ڈیٹرمنینٹ اور اس کے پھیلائے کا تصور ہے۔ لیکن اس نے اس طریقے کو صرف دو مساواتوں سے مقدار خارج کرنے میں کیا ہے تا کہ سیدھے طور پر ہم وقت خطی مساواتوں کے سیٹ کے حل۔ ٹی، ہیشی، ”جاپانی ریاضی میں خاکوڈی اور ڈیٹرمنینٹس“، ٹوکیو ریاضی میں Proc. میں Soc. V۔

وینر مونڈے پہلے شخص تھے جس نے ڈیٹرمنینٹس کو آزاد فنکشن کے طور پر تسلیم کیا۔ انہیں اصل موجد کے نام سے پکارنا چاہئے۔ لپلیس (1772) ڈیٹرمنینٹ کو اتماتی صفر کی شکل میں پھیلائے کا ایک عام فارمولہ دیا تھا۔ 1973 میں لگرنج نیدو سری اور تیسری ترتیب والے ڈیٹرمنینٹس کو برتا اور ان کا استعمال مساوات حل کرنے کے علاوہ کیا۔ 1801 میں گوس نے ڈیٹرمنینٹس کا استعمال اعداد کے نظریہ میں کیا ہے۔

اگلے عظیم حصے دار بڑا حصہ لینے والا جیکس فلیبی میری بینٹ، (1812) تھا جس نے دو ماتر کے m ۔ کالم اور n ۔ قطاروں کے حاصل ضرب کو رشتہ دینے کے لئے ایک مسئلہ بیان کیا، جو کہ خاص کیس $m=n$ کے لئے جو کہ ایک ضربی مسئلہ کے طور پر سامنے آئے۔

اس کے ساتھ ہی کوپے (1812) نے اسی مضمون کو پیش کیا۔ اس نے لفظ ”ڈیٹرمنینٹ“ کا استعمال موجودہ حالات کے مطابق کیا۔ اس نے ضربی مسئلہ کا ثبوت بینٹس طریقے سے دیا۔ زیادہ مطمئن اس نظریہ میں سب سے زیادہ حصہ کارل گسٹو جیکب جیکوبی نے دیا، اس کے بعد لفظ ڈیٹرمنینٹ کو آخری منظوری ملی۔